

第四届全国大学生数学竞赛决赛试题评分细则

(非数学类, 2013)

一、(本题 25 分) 简答下列各题

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right], (a > 1).$

2. 设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足 $f_u(u, v) + f_v(u, v) = uv$, 求 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程. 并求其通解.

3. 求在 $[0, +\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$, 使 $f(x) = e^{-u(x)}$, 其中 $u = \int_0^x f(t) dt$.

4. 计算不定积分 $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$.

5. 过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求此切平面的方程.

1. 解 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln \left(1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a} \cdot \frac{\ln x + \ln(\ln a)}{\ln x - \ln a}} \quad (4 \text{ 分})$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \ln e^{\ln a^2} = 2 \ln a. \quad (1 \text{ 分})$$

2. 解 $y' = -2e^{-2x} f(x, x) + e^{-2x} f_u(x, x) + e^{-2x} f_v(x, x) = -2y + x^2 e^{-2x}$

因此, 所求的一阶微分方程为

$$y' + 2y = x^2 e^{-2x} \quad (3 \text{ 分})$$

解得 $y = e^{-\int 2dx} \left(\int x^2 e^{-2x} e^{\int 2dx} dx + C \right) = \left(\frac{x^3}{3} + C \right) e^{-2x} \quad (C \text{ 为任意常数}) \quad (2 \text{ 分})$

3. 解 由题意

$$e^{-\int_0^x f(t) dt} = f(x)$$

即有

$$\int_0^x f(t) dt = -\ln f(x) \quad (2 \text{ 分})$$

两边求导可得

$$f'(x) = -f^2(x), \text{ 并且 } f(0) = e^0 = 1$$

由此可求得 $f(x) = \frac{1}{x+1}$. (3 分)

4. 解 由于

$$\int x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2) = \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{则原式} = \int \arctan x d\left[\frac{1}{2}(1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2\right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2] \arctan x - \frac{1}{2} \int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}] dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan x [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2 - 3] - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3}{2} x + C \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

5. 解 设 $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2 - 27$, 则曲面法向量为

$$\vec{n}_1 = \{F_x, F_y, F_z\} = 2\{3x, y, -z\} \quad (1 \text{ 分})$$

过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$10x + 2y - 2z - 27 + \lambda(x + y - z) = 0, \text{ 即 } (10 + \lambda)x + (2 + \lambda)y - (2 + \lambda)z - 27 = 0$$

其法向量为

$$\vec{n}_2 = \{10 + \lambda, 2 + \lambda, -(2 + \lambda)\} \quad (1 \text{ 分})$$

设所求切点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \frac{10 + \lambda}{3x_0} = \frac{2 + \lambda}{y_0} = \frac{2 + \lambda}{z_0} \\ 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27 \\ (10 + \lambda)x_0 + (2 + \lambda)y_0 - (2 + \lambda)z_0 - 27 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

解得 $x_0 = 3, y_0 = 1, z_0 = 1, \lambda = -1$, 或 $x_0 = -3, y_0 = -17, z_0 = -17, \lambda = -19$

所求切平面方程为

$$9x + y - z - 27 = 0 \text{ 或 } 9x + 17y - 17z + 27 = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

二、(本题 15 分) 设曲面 $\Sigma: z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2$, 其面密度为常数 ρ . 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力(记引力常数为 G).

解. 设引力 $F = (F_x, F_y, F_z)$. 由对称性 $F_x = 0, F_y = 0$. (2 分)

记 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 从原点出发过点 (x, y, z) 的射线与 z 轴的夹角为 θ . 则有 $\cos \theta = \frac{z}{r}$.

质点和面积微元 dS 之间的引力为

$$dF = G \frac{\rho dS}{r^2}, \text{ 而 } dF_z = G \frac{\rho dS}{r^2} \cos \theta = G \rho \frac{z}{r^3} dS, \quad (4 \text{ 分})$$

$$F_z = \int_{\Sigma} G\rho \frac{z}{r^3} dS. \quad (2 \text{ 分})$$

在 z 轴上的区间 $[1, 2]$ 上取小区间 $[z, z + dz]$, 相应于该小区间有

$$dS = 2\pi z \sqrt{2} dz = 2\sqrt{2}\pi z dz. \quad (3 \text{ 分})$$

而 $r = \sqrt{2z^2} = \sqrt{2}z$, 就有

$$F_z = \int_1^2 G\rho \frac{2\sqrt{2}\pi z^2}{2\sqrt{2}z^3} dz = G\rho\pi \int_1^2 \frac{1}{z} dz = G\rho\pi \ln 2. \quad (4 \text{ 分})$$

三、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 连续可导,

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \right], \text{ 证明: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 存在.}$$

证 当 $t > 0$ 时, 对函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0, t]$ 上用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln(1+t) = \frac{t}{1+\xi}, \quad 0 < \xi < t.$$

由此得

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t$$

取 $t = \frac{1}{x}$, 有

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (5 \text{ 分})$$

所以, 当 $x \geq 1$ 时, 有 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加. (1 分)

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f'(x) &\leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \leq \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

故 $\int_1^x f'(t) dt \leq \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t^3}} dt$, 所以 $f(x) - f(1) \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$

即 $f(x) \leq f(1) + 1$, $f(x)$ 有上界. (4 分)

由于 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加且有上界, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. (1 分)

四、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| < 1$, 又 $f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$.

试证在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

证 在 $[-2, 0]$ 与 $[0, 2]$ 上分别对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 可知存在

$\xi_1 \in (-2, 0), \xi_2 \in (0, 2)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{2}, f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

由于 $|f(x)| < 1$, 所以 $|f'(\xi_1)| \leq 1, |f'(\xi_2)| \leq 1$. (2 分)

设 $F(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$, 则

$$|F(\xi_1)| \leq 2, |F(\xi_2)| \leq 2. \quad (*) \quad (2 \text{ 分})$$

由于 $F(0) = f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$, 且 $F(x)$ 为 $[\xi_1, \xi_2]$ 上的连续函数, 应用闭区间上连续函数的最大值定理, $F(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上必定能够取得最大值, 设为 M . 则当 ξ 为 $F(x)$ 的最大

值点时, $M = F(\xi) \geq 4$, 由 $(*)$ 式知 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$. (2 分)

所以 ξ 必是 $F(x)$ 的极大值点. 注意到 $F(x)$ 可导, 由极值的必要条件可知

$$F'(\xi) = 2f'(\xi)[f(\xi) + f''(\xi)] = 0 \quad (3 \text{ 分})$$

由于 $F(\xi) = f^2(\xi) + [f'(\xi)]^2 \geq 4, |f(\xi)| \leq 1$, 可知 $f'(\xi) \neq 0$. 由上式知

$$f(\xi) + f''(\xi) = 0. \quad (2 \text{ 分})$$

五、(本题 15 分) 求二重积分 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |x^2 + y^2 - x - y| dx dy$

解. 由对称性, 可以只考虑区域 $y \geq x$, 由极坐标变换得

$$I = 2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^1 \left| r - \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right| r^2 dr = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \left| r - \sqrt{2} \cos \varphi \right| r^2 dr \quad (4 \text{ 分})$$

后一个积分里, (φ, r) 所在的区域为矩形: $D: 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1$. 把 D 分解为 $D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1: 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1, \quad D_2: \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1.$$

又记 $D_3: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \sqrt{2} \cos \varphi \leq r \leq 1$, 这里 D_3 是 D_1 的子集,

且记 $I_i = \iint_{D_i} d\varphi dr |r - \sqrt{2} \cos \varphi| r^2, (i=1, 2, 3)$, 则

$$I = 2(I_1 + I_2). \quad (3 \text{ 分})$$

注意到 $(r - \sqrt{2} \cos \varphi) r^2$ 在 $D_1 \setminus D_3, D_2, D_3$ 的符号分别为负, 正, 正. 则

$$I_3 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{2} \cos \varphi}^1 (r - \sqrt{2} \cos \varphi) r^2 dr = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (3 \text{ 分})$$

$$I_1 = \iint_{D_1} (\sqrt{2} \cos \varphi - r) r^2 d\varphi dr + 2I_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{8} + 2I_3 = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$I_2 = \iint_{D_2} (r - \sqrt{2} \cos \varphi) r^2 d\varphi dr = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以就有 } I = 2(I_1 + I_2) = 1 + \frac{3\pi}{8}. \quad (1 \text{ 分})$$

六、(本题 15 分) 若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都是收敛的, 试证明

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

证. 用反证法. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, (1 分)

则存在自然数 $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m_k} |a_i| \geq 1, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |a_i| \geq k \quad (k=2, 3, \dots) \quad (6 \text{ 分})$$

取 $x_i = \frac{1}{k} \operatorname{sgn} a_i (m_{k-1} \leq i \leq m_k)$, 则

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i x_i = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{|a_i|}{k} \geq 1. \quad (6 \text{ 分})$$

由此可知, 存在数列 $\{x_n\} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 发散, 矛盾. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. (2 分)